応用統計学　レポート課題 2

2017 年 12 月 6 日 (水)
清 智也　sei@mist.i.u-tokyo.ac.jp
http://ur0.pw/yTzt

期限：12 月 20 日 (水)
提出先：工学部 6 号館 1 階にある清のポスト，または上記メールアドレス
注意事項：レポートには学籍番号，氏名，提出年月日を明記すること。

問題　$n \geq 2$ とする。確率変数 $X_1, \ldots, X_n$ は独立で，それぞれ平均 μ，分散 σ^2 の正規分布 $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ に従うとする。また，t 統計量を

$$T_n = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\hat{\sigma}}$$

と定義する。 ただし $\bar{X} = n^{-1} \sum_{t=1}^n X_t$ は標本平均，$\hat{\sigma}^2 = (n-1)^{-1} \sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2$ は不偏標本分散を表す。このとき T_n が自由度 $n-1$ の t 分布に従うことを，以下の手順で証明せよ。

(i) $\boldsymbol{j} = (1, \ldots, 1)'$，$\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{j}/\sqrt{n}$ とし，また $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ が $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底となるように行列 $\boldsymbol{Q} = (\boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n) \in \mathbb{R}^{n \times (n-1)}$ を選ぶ。$n = 4$ のとき，$\boldsymbol{Q}$ の具体例を 1 つ与えよ。

(ii) $\boldsymbol{Q}$ の選び方によらず，$\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}' = \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1'$ が成り立つことを示せ。ただし $\boldsymbol{I}_n$ は $n \times n$ の単位行列を表す。

(iii) $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)'$ とおくと，$\hat{\sigma}^2 = (n-1)^{-1} \boldsymbol{X}'\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}'\boldsymbol{X}$ と書けることを示せ。

(iv) $\bar{X}$ と $\boldsymbol{Q}'\boldsymbol{X}$ は独立で，かつ $\bar{X} \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2/n)$，$\boldsymbol{Q}'\boldsymbol{X} \sim \mathrm{N}(\boldsymbol{0}, \sigma^2 \boldsymbol{I}_{n-1})$ となることを示せ。ここで，多変量正規分布について成り立つ性質は証明なく用いてよいが，どのような性質を用いたかを明記すること。

(v) これらの結果から，T_n は自由度 $n-1$ の t 分布に従うことを示せ。

定義

- $Z_1, \ldots, Z_d$ が独立に標準正規分布 $\mathrm{N}(0,1)$ に従うとき，$Z_1^2 + \cdots + Z_d^2$ の従う確率分布を自由度 d の χ^2 分布といい，$\chi^2(d)$ と表す。
- Z と W が独立で，かつ Z が $\mathrm{N}(0,1)$，W が $\chi^2(d)$ に従うとき，$Z/\sqrt{W/d}$ の従う確率分布を自由度 d の t 分布という。