応用統計学第12回
レポート2に関するコメント

2018年1月10日(水)

清 智也

提出媒体

- 紙:７２人
- PDF:３２人

問 (i) の答えの例

ヘルマート行列(の一部)

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ -a & b & c \\ 0 & -2b & c \\ 0 & 0 & -3c \end{pmatrix}$$

アダマール行列(の一部)

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & -b & -c \\ -a & b & -c \\ -a & -b & c \end{pmatrix}$$

0 が一番多い例

$$\begin{pmatrix} a & 0 & c \\ -a & 0 & c \\ 0 & b & -c \\ 0 & -b & -c \end{pmatrix}$$

a,b,c は各列を正規化するための定数

アダマール予想(未解決問題):
任意の4の倍数 n に対して、n×n 行列 H で、
各要素が +1, -1 のみからなり、
かつ各列が直交するようなものが存在するだろう。

問 (iv) について

たとえば以下の性質を使う。（特に性質２）

1. $X_1,\ldots,X_n$ が独立に正規分布に従うとき、その同時分布は多変量正規分布となる。
2. 一般に確率変数ベクトル Z が多変量正規分布 N(μ,Σ) に従うとき、任意の行列 A とベクトル b に対して AZ+b は N(Aμ+b, AΣA’) に従う。
3. 多変量正規分布に対しては、共分散が0であることと、独立であることが同値となる。

問 (iv) の別解

- 同時密度関数を導出することで証明するという答案もあった。これは一番確実な方法である。

- 特性関数やモーメント母関数を利用するという方針でも OK。

多く見られた誤答(の言い換え)

- 「X と Y の周辺分布がそれぞれ正規分布で、X と Y の共分散(あるいは相関)が 0 である。したがって X と Y は独立である。」

- 反例: X は N(0,1) に従う確率変数、Z は確率 0.5 ずつで +1, -1 をとる確率変数とし、X と Z は独立とする。このとき Y = ZX とおくと、X と Y の周辺分布はともに N(0,1) かつ共分散は 0 だが、独立ではない(Y|X の分布が X に依存)。

細かいことだが看過できず…

独立性

- ベクトルの一次独立性と確率変数の独立性を混同しているとみられる答案が少しあった。

- 確率変数 X と Y が独立　　X, Y は確率変数ベクトルでもよい

$$\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B)$$ A,Bは任意の集合

$$\Leftrightarrow E[g(X)h(Y)] = E[g(X)]E[h(Y)]$$ g,hは任意の関数

$$\Leftrightarrow E[e^{itX+iuY}] = E[e^{itX}]E[e^{iuY}]$$ t,uは任意の実数

$$\Leftrightarrow f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$$ （同時密度関数が存在する場合）

さらに補足

- Cov(X,Y) を計算するために V(X+Y), V(X), V(Y) を計算するという答案が複数あった。しかしこれはやや遠回りである。
- Cov(X,Y) の双線形性を使うとよい。

$$\mathrm{Cov}(a_1X_1+a_2X_2,Y)=a_1\mathrm{Cov}(X_1,Y)+a_2\mathrm{Cov}(X_2,Y)$$

$$\mathrm{Cov}(X,b_1Y_1+b_2Y_2)=b_1\mathrm{Cov}(X,Y_1)+b_2\mathrm{Cov}(X,Y_2)$$

- 双線型性の証明は定義に戻れば容易。

$$\mathrm{Cov}(X,Y):=E[(X-E[X])(Y-E[Y])]$$